Resolución : Parcial 1 - MA1112.

1. (4 ptos c/u) Calcular las siguientes integrales

$$1.1. \qquad \int \frac{dx}{2\,\mathrm{sen}^2 x + \cos\big(2x\big) - \mathrm{sen}\big(2x\big)}$$

Solución : Observemos que el denominador $2\,\mathrm{sen}^2 x + \cos\big(2x\big) - \mathrm{sen}\big(2x\big)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{sen}^2 x + \cos\big(2x\big) - \mathrm{sen}\big(2x\big) &= 2\,\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x - \mathrm{sen}\big(2x\big) \\ &= \mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x - \mathrm{sen}\big(2x\big) = 1 - \mathrm{sen}\big(2x\big), \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\,\mathrm{sen}^2 x + \cos\big(2x\big) - \mathrm{sen}\big(2x\big)} &= \int \frac{dx}{1 - \mathrm{sen}\big(2x\big)} = \int \frac{1 + \mathrm{sen}\big(2x\big)}{\Big(1 - \mathrm{sen}\big(2x\big)\Big)\Big(1 + \mathrm{sen}\big(2x\big)\Big)}\, dx \\ &= \int \frac{1 + \mathrm{sen}\big(2x\big)}{1 - \mathrm{sen}^2\big(2x\big)}\, dx = \int \frac{1 + \mathrm{sen}\big(2x\big)}{\cos^2\big(2x\big)}\, dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2\big(2x\big)} + \int \frac{\mathrm{sen}\big(2x\big)}{\cos^2\big(2x\big)}\, dx, \end{aligned}$$

donde

- Para $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2\big(2x\big)}$. Se propone el cambio de variable

$$u = 2x, \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{du}{2} = dx,$$

la integral se transforma en

$$\int \frac{dx}{\cos^2\big(2x\big)} = \int \sec^2 u \,\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sec^2 u \, du = \frac{1}{2}\tan u + C_1 = \frac{1}{2}\tan\big(2x\big) + C_1.$$

Luego

$$\int \frac{dx}{\cos^2\big(2x\big)} = \frac{1}{2}\tan\big(2x\big) + C_1.$$

- Para $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\big(2x\big)}{\cos^2\big(2x\big)}\,dx$. Se propone el cambio de variable

$$u = \cos\big(2x\big), \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{du}{2} = \operatorname{sen}\big(2x\big)\,dx,$$

la integral se transforma en

$$\int \frac{\operatorname{sen}\big(2x\big)}{\cos^2\big(2x\big)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{u} + C_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos\big(2x\big)} + C_2 = \frac{1}{2}\sec\big(2x\big) + C_2.$$

Luego

$$\int \frac{\operatorname{sen}\big(2x\big)}{\cos^2\big(2x\big)}\,dx = \frac{1}{2}\sec\big(2x\big) + C_2.$$

Entonces

$$\int \frac{dx}{2\operatorname{sen}^2 x + \cos\big(2x\big) - \operatorname{sen}\big(2x\big)} = \frac{1}{2}\tan\big(2x\big) + \frac{1}{2}\sec\big(2x\big) + C.$$

★

1. (4 ptos c/u) Calcular las siguientes integrales

$$1.2. \qquad \int_{1/4}^{4} \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}}{x^2}\,dx.$$

Solución : Se propone el cambio de variable

$$u=\sqrt{x}, \qquad \Longrightarrow \qquad du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx,$$

puesto que

$$\sqrt{x}=u \qquad \Longrightarrow \qquad x=u^2,$$

mientras que,

$$dx=2u\,du.$$

Por otra parte, cambiamos los límites de integración

$$\text{Si} \quad x=\frac{1}{4} \quad \text{entonces,} \quad u=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)} \quad \Longrightarrow \quad u=\frac{1}{2}$$

$$\text{Si} \quad x=4 \quad \text{entonces,} \quad u=\sqrt{(4)} \quad \Longrightarrow \quad u=2$$

Así, la integral se transforma en

$$\int_{1/4}^{4} \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}}{x^2}\,dx=\int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{u^2-2u+1}}{\left(u^2\right)^2}\left(2u\,du\right)=2\int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{u^2-2u+1}}{\cancel{u^4}^{\,3}}\cancel{u}\,du$$

$$=2\int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{u^2-2u+1}}{u^3}\,du.$$

Resolvemos la integral $\displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{u^2-2u+1}}{u^3}\,du$

Tenemos que,

$$u^2-2u+1=\left(u-1\right)^2,$$

así, el numerador del integrador queda

$$\sqrt{u^2-2u+1}=\sqrt{\left(u-1\right)^2}=\left|u-1\right|,$$

entonces la integral se expresa como

$$\int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{u^2-2u+1}}{u^3}\,du=\int_{1/2}^{2} \frac{\left|u-1\right|}{u^3}\,du.$$

Por definición de valor absoluto

$$\left|u-1\right| = \begin{cases} u-1 & \text{si} \quad u-1 \geq 0 \\ -\left(u-1\right) & \text{si} \quad u-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} u-1 & \text{si} \quad u \geq 1 \\ -\left(u-1\right) & \text{si} \quad u < 1 \end{cases}$$

la integral se escribe

$$\int_{1/2}^{2} \frac{\left|u-1\right|}{u^3}\,du = \int_{1/2}^{1} \frac{-\left(u-1\right)}{u^3}\,du + \int_{1}^{2} \frac{u-1}{u^3}\,du = -\int_{1/2}^{1} \frac{u-1}{u^3}\,du + \int_{1}^{2} \frac{u-1}{u^3}\,du,$$

donde

$$\int \frac{u-1}{u^3}\,du = \int \frac{u}{u^3}\,du - \int \frac{1}{u^3}\,du = \int u^{-2}\,du - \int u^{-3}\,du = \frac{u^{-2+1}}{-2+1} - \frac{u^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= \frac{u^{-1}}{-1} - \frac{u^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{u} - \left(-\frac{1}{2u^2}\right) + C = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C.$$

Así,

$$\int \frac{u-1}{u^3}\,du = -\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2} + C.$$

Entonces, por el **Teorema Fundamental del Cálculo**

$$\int_{1/2}^{2} \frac{\left|u-1\right|}{u^3}\,du = -\left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right|_{\mathbf{1/2}}^{\mathbf{1}} + \left(-\frac{1}{u} + \frac{1}{2u^2}\right|_{\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}$$

$$= -\left[-\frac{1}{\left(\mathbf{1}\right)} + \frac{1}{2\left(\mathbf{1}\right)^2} - \left(-\frac{1}{\left(\mathbf{1/2}\right)} + \frac{1}{2\left(\mathbf{1/2}\right)^2}\right)\right]$$

$$+ \left[-\frac{1}{\left(\mathbf{2}\right)} + \frac{1}{2\left(\mathbf{2}\right)^2} - \left(-\frac{1}{\left(\mathbf{1}\right)} + \frac{1}{2\left(\mathbf{1}\right)^2}\right)\right]$$

$$= -\left[-1 + \frac{1}{2} - \left(-2 + \frac{1}{2\left(1/4\right)}\right)\right] + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(4\right)} - \left(-1 + \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= -\left[-\frac{1}{2} - \left(-2 + \frac{1}{1/2}\right)\right] + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= -\left[-\frac{1}{2} - \left(-2+2\right)\right] + \left[-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\left[-\frac{1}{2} - \left(\cancel{-2}+\cancel{2}\right)\right] + \left[\cancel{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} + \cancel{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= -\left[-\frac{1}{2}\right] + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Luego

$$\int_{1/2}^{2} \frac{\left|u-1\right|}{u^3}\, du = \frac{5}{8}.$$

Retomando la integral inicial

$$\int_{1/4}^{4} \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}}{x^2}\, dx = 2\int_{1/2}^{2} \frac{\sqrt{u^2-2u+1}}{u^3}\, du = 2\int_{1/2}^{2} \frac{\left|u-1\right|}{u^3}\, du = 2\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{5}{4}.$$

Finalmente

$$\int_{1/4}^{4} \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x}+1}}{x^2}\, dx = \frac{5}{4}.$$

★

1. (4 ptos c/u) Calcular las siguientes integrales

$$1.3. \qquad \int \frac{\cos x \operatorname{sen}\big(2x\big)\ dx}{2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}.$$

Solución : Observemos que, el término del denominador se puede escribir como

$$2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x + \left(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x\right) = \cos^2 x + 1,$$

mientras que, el numerador se puede escribir como

$$\cos x \operatorname{sen}\big(2x\big) = \cos x\left(2\operatorname{sen} x \cos x\right) = 2\cos^2 x \operatorname{sen} x,$$

entonces, la integral se transforma en

$$\int \frac{\cos x \operatorname{sen}\big(2x\big)\ dx}{2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = \int \frac{2\cos^2 x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1}\, dx = 2\int \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1}\, dx.$$

Se propone el cambio de variable

$$u = \cos x, \qquad \Longrightarrow \qquad du = -\operatorname{sen} x\, dx, \qquad \text{de aquí,} \qquad -\,du = \operatorname{sen} x\, dx,$$

la integral queda

$$\int \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1}\, dx = \int \frac{u^2}{u^2+1}\big(-du\big) = -\int \frac{u^2}{u^2+1}\, du.$$

Resolvemos la integral $\displaystyle\int \frac{u^2}{u^2+1}\, du$

$$\int \frac{u^2}{u^2+1}\, du = \int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}\, du = \int \frac{\big(u^2+1\big)-1}{u^2+1}\, du$$

$$= \int \frac{u^2+1}{u^2+1}\, du - \int \frac{1}{u^2+1}\, du = \int \frac{\cancel{u^2+1}}{\cancel{u^2+1}}\, du - \int \frac{du}{u^2+1}$$

$$= \int du - \int \frac{du}{u^2+1} = u - \arctan u + C,$$

con lo que

$$\int \frac{u^2}{u^2+1}\, du = u - \arctan u + C,$$

como $u = \cos x$, se tiene

$$\int \frac{\cos^2 x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x + 1}\, dx = -\int \frac{u^2}{u^2+1}\, du = -\Big(\cos x - \arctan u\Big) + C = -\cos x + \arctan\big(\cos x\big) + C.$$

Entonces

$$\int \frac{\cos x \operatorname{sen}\big(2x\big)\ dx}{2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = 2\Big(-\cos x + \arctan\big(\cos x\big)\Big) + C = -2\cos x + 2\arctan\big(\cos x\big) + C.$$

Luego

$$\int \frac{\cos x \operatorname{sen}\big(2x\big)\ dx}{2\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} = -2\cos x + 2\arctan\big(\cos x\big) + C.$$

★

2. (4 ptos) Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida por

$$F(x) = \int_1^x \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right)}{\left(t-2\right)^2+1}\, dt$$

en el punto de abscisa $x = 3$.

Solución : Para obtener la ecuación de la recta tangente a una curva es necesario conocer

- El punto de tangencia, que es un punto por donde pasa la recta tangente y pertenece a la función
- La pendiente de la recta, la cual viene dada por la derivada de la función evaluada en el punto de tangencia.

Calculamos el punto de tangencia. Puesto que, la recta tangente debe pasar por el punto $P\left(x_0, y_0\right)$, con $x_0 = 3$, entonces evaluamos $x = 3$ en la función

$$y_0 = F(3) = \int_1^3 \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right)}{\left(t-2\right)^2+1}\, dt.$$

Resolvemos la integral $\displaystyle\int_1^3 \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right)}{\left(t-2\right)^2+1}\, dt$

Se propone el cambio de variable

$$u = t-2, \qquad du = dt,$$

con este cambio se espera transformar la integral en una integral sencilla de resolver, es decir, en una integral de tabla.

Cambiamos los límites de integración

$$\begin{array}{lllll} \text{Si} & t=1 & \text{entonces,} & u=(1)-2 & \Longrightarrow \quad u=-1 \\ \text{Si} & t=3 & \text{entonces,} & u=(3)-2 & \Longrightarrow \quad u=1 \end{array}$$

la integral nos queda

$$\int_1^3 \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right)}{(t-2)^2+1}\, dt = \int_{-1}^1 \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}u\right)}{u^2+1}\, du,$$

en vista que estamos integrando sobre un intervalo simétrico, estudiamos la simetría de la función

$$f(-u) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(-u)\right)}{(-u)^2+1} = \frac{-\tan\left(\frac{\pi}{4}u\right)}{u^2+1} = -\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}u\right)}{u^2+1} = -f(u),$$

es decir, la función es impar, luego, la integral de la función impar $f(u) = \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}u\right)}{u^2+1}$ sobre el intervalo simétrico $\left[-1, 1\right]$ es igual a cero

$$\int_{-1}^{1} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}u\right)}{u^2+1}\, du = 0.$$

Así,

$$\int_{1}^{3} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right)}{(t-2)^2+1}\, dt = 0.$$

Por lo tanto, $y_0 = F(3) = 0$, así, el punto de tangencia es $\left(3, 0\right)$.

A conitnuación calculamos la pendiente de la recta tangente, para ello derivamos la función F con respecto a x

$$F'(x) = \left[\int_{1}^{x} \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(t-2)\right)}{\left(t-2\right)^2+1}\, dt\right]' = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right)}{\left(x-2\right)^2+1}.$$

La pendiente de la recta tangente viene dada por

$$m_{\tan} = F'(3) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(3-2)\right)}{\left(3-2\right)^2+1} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}(1)\right)}{\left(1\right)^2+1} = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1}{2}.$$

Entonces la ecuación de la recta tangente a la curva F en el punto P, viene dada por

$$y - 0 = \frac{1}{2}\left(x-3\right) \qquad \Longrightarrow \qquad 2y = x - 3,$$

es decir

$$x - 2y - 3 = 0.$$

★

3. (5 ptos) Calcular, si es que existe

$$\lim_{n\to+\infty} 2n \underbrace{\left(\frac{1}{\left(n+2\right)^2} + \frac{1}{\left(n+4\right)^2} + \frac{1}{\left(n+6\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(n+2k\right)^2} + \cdots \right)}_{n \quad \text{términos}}.$$

Solución : Denotamos por S a la expresión

$$2n \left(\frac{1}{\left(n+2\right)^2} + \frac{1}{\left(n+4\right)^2} + \frac{1}{\left(n+6\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(n+2k\right)^2} + \cdots \right).$$

Observemos que

$$S = 2n \left(\frac{1}{\left(n+2\right)^2} + \frac{1}{\left(n+4\right)^2} + \frac{1}{\left(n+6\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(n+2k\right)^2} + \cdots \right)$$

$$= 2n \left(\frac{1}{\left(n+2\left(1\right)\right)^2} + \frac{1}{\left(n+2\left(2\right)\right)^2} + \frac{1}{\left(n+2\left(3\right)\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(n+2k\right)^2} + \cdots \right)$$

consideremos el término genérico de la suma, $\dfrac{1}{\left(n+2k\right)^2}$, el cual podemos escribir como

$$\frac{1}{\left(n+2k\right)^2} = \frac{1}{\left(n\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)\right)^2} = \frac{1}{n^2\left(1+\dfrac{2k}{n}\right)^2}.$$

De aquí,

$$S = 2n \left(\frac{1}{\left(n+2\left(1\right)\right)^2} + \frac{1}{\left(n+2\left(2\right)\right)^2} + \frac{1}{\left(n+2\left(3\right)\right)^2} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{1}{\left(n+2k\right)^2} + \cdots + \frac{1}{\left(n+2n\right)^2} \right)$$

$$= 2n\left(\frac{1}{n^2\left(1+\frac{2\left(1\right)}{n}\right)^2}+\frac{1}{n^2\left(1+\frac{2\left(2\right)}{n}\right)^2}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{n^2\left(1+\frac{2\left(k\right)}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{n^2\left(1+\frac{2\left(n\right)}{n}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{2n}{n^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{2\left(1\right)}{n}\right)^2}+\frac{1}{\left(1+\frac{2\left(2\right)}{n}\right)^2}+\cdots\right.$$

$$\left.\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{2\left(k\right)}{n}\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(1+\frac{2\left(n\right)}{n}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2}\,\frac{2}{n}=\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k\right)\Delta x_k.$$

donde

$$x_k = 1+\frac{2}{n}\,k \qquad \text{y} \qquad \Delta x_k=\frac{2}{n}.$$

Así, como

$$x_k = a + k\,\Delta x_k,$$

consideramos, un intervalo cerrado tal que el extremo izquierdo sea igual a 1, entonces

$$\frac{b-a}{n}=\Delta x_k=\frac{2}{n} \qquad \Longrightarrow \qquad b-1=2 \qquad \Longrightarrow \qquad b=3,$$

por lo que, el intervalo cerrado es $\left[1,3\right]$.

Consideremos la función
$$f\left(x\right)=\frac{1}{x^2}.$$

Entonces
$$\lim_{n\to+\infty}S=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(x_k\right)\Delta x_k=\int_1^3\frac{1}{x^2}\,dx=\int_1^3 x^{-2}\,dx=\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right|_1^3$$
$$=\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right|_1^3=\left(-\frac{1}{x}\right|_1^3=\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right)=-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}.$$

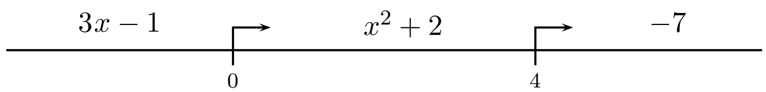
Luego
$$\lim_{n\to+\infty}2n\left(\frac{1}{\left(n+2\right)^2}+\frac{1}{\left(n+4\right)^2}+\frac{1}{\left(n+6\right)^2}+\cdots+\frac{1}{\left(n+2k\right)^2}+\cdots\right)=\frac{2}{3}.$$

★

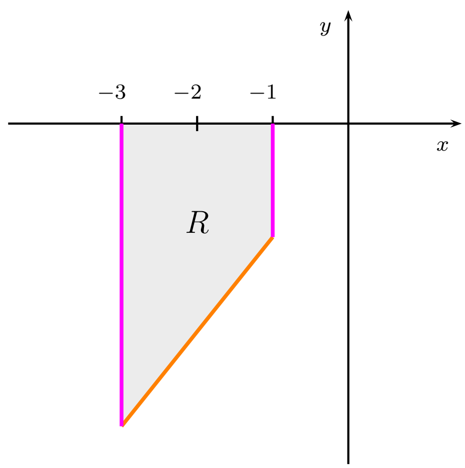
4. (3 ptos c/u) Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones

(a) Sea $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+2 & \text{si} \quad 0 \leq x < 4 \\ -7 & \text{si} \quad x \geq 4 \end{cases}$. El área aproximada de la región R limitada por la gráfica de la función f, las rectas verticales $x=-1$, $x=-3$ y el eje x, al usar una partición cuyas longitudes de los subintervalos vienen dada por $\left\{0.2,\, 1,\, 0.5,\, 0.2,\, 0.1\right\}$ y polígonos inscritos es 14.

Solución : Por definición de la función f se tiene el siguiente esquema



Deseamos calcular el área aproximada de la región R limitada por la gráfica de la función f, las rectas verticales $x=-1$, $x=-3$ y el eje x, entonces como $x=-1<0$ y $x=-3<0$, la parte de la función f involucrada en este calculo es $f(x)=3x-1$.



Región R

Realizamos la partición del intervalo $\left[-3,-1\right]$

$$x_0 = -3$$

$$x_1 = -3 + 0.2 = -2.8$$

$$x_2 = -3 + 0.2 + 1 = -1.8$$

$$x_3 = -3 + 0.2 + 1 + 0.5 = -1.3$$

$$x_4 = -3 + 0.2 + 1 + 0.5 + 0.2 = -1.1$$

$$x_5 = -3 + 0.2 + 1 + 0.5 + 0.2 + 0.1 = -1$$

Entonces

$$A \approx \sum_{i=1}^{5} -f\left(x_i\right) \Delta x_i,$$

donde x_i es el extremo derecho de cada subintervalo $\left[x_{i-1}, x_i\right]$.

$$\begin{aligned}
A &\approx -\left[f\left(x_1\right)\Delta x_1 + f\left(x_2\right)\Delta x_2 + f\left(x_3\right)\Delta x_3 + f\left(x_4\right)\Delta x_4 + f\left(x_5\right)\Delta x_5 \right] \\
&= -\left[f\left(-2.8\right)\left(0.2\right) + f\left(-1.8\right)\left(1\right) + f\left(-1.3\right)\left(0.5\right) + f\left(-1.1\right)\left(0.2\right) + f\left(-1\right)\left(0.1\right) \right] \\
&= -\left[0.2\left(3\left(-2.8\right) - 1\right) + \left(3\left(-1.8\right) - 1\right) + 0.5\left(3\left(-1.3\right) - 1\right) \right. \\
&\qquad \left. + 0.2\left(3\left(-1.1\right) - 1\right) + 0.1\left(3\left(-1\right) - 1\right) \right] \\
&= -\left[0.2\left(-9.4\right) + \left(-6.4\right) + 0.5\left(-4.9\right) + 0.2\left(-4.3\right) + 0.1\left(-4\right) \right] \\
&= -\left(-1.88 - 6.4 - 2.45 - 0.86 - 0.4\right) = 11.99.
\end{aligned}$$

Luego

$$A \approx 11.99,$$

con lo que concluimos que la proposición es **FALSA**. ★

4. (3 ptos c/u) Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones

(b) Si f es una función continua definida en $\mathbb{R}$, tal que $\operatorname{Rgo} f : \left[5, 10\right]$ y g una función continua, no positiva en el intervalo $\left[a, b\right]$, tal que $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx = k$, entonces

$$5k \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq 10k.$$

Solución : Puesto que, $\operatorname{Rgo} f : \left[5, 10\right]$, se tiene que

$$5 \leq f(x) \leq 10.$$

Multiplicamos la cadena de desigualdades anterior por g, como g es no positiva en el intervalo $\left[a, b\right]$, la relación de orden cambia

$$5g(x) \geq f(x)\, g(x) \geq 10g(x).$$

Integrando respecto a x en el intervalo $\left[a, b\right]$, por la propiedad de comparación se obtiene

$$\int_a^b 5g(x) \geq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \geq \int_a^b 10g(x),$$

por la propiedad de linealidad de la integral de Riemann

$$5\int_a^b g(x) \geq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \geq 10\int_a^b g(x),$$

puesto que, $\displaystyle\int_a^b g(x)\, dx = k$, se tiene

$$5k \geq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \geq 10k.$$

Luego

$$10k \leq \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leq 5k,$$

así, la proposición es **FALSA**. ★

4. (3 ptos c/u) Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones

   (c) Al calcular $\displaystyle\int_1^{1+\pi} \left|\cos x\right| dx$ se obtiene como resultado 2.

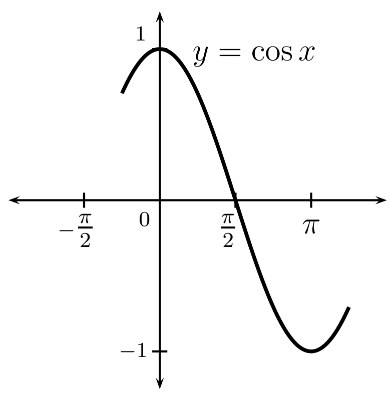
Solución : Es conocido que, si f es una función periódica con período p, entonces

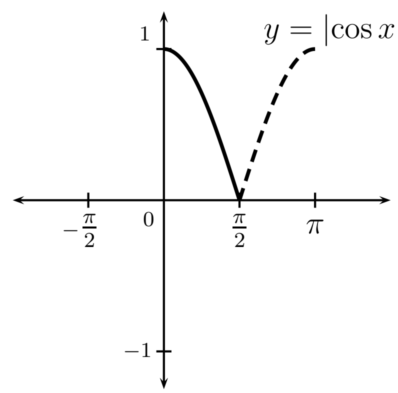
$$\int_a^{a+p} f(x)\, dx = \int_0^p f(x)\, dx$$

puesto que $f(x) = \left|\cos x\right|$ es periódica de período π, se tiene

$$\int_1^{1+\pi} \left|\cos x\right| dx = \int_0^{\pi} \left|\cos x\right| dx,$$

de aquí,





por lo que

$$\int_0^{\pi} \left|\cos x\right| dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos x\, dx = 2\left(\operatorname{sen}(x)\Big|_0^{\pi/2}\right) = 2\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0)\right) = 2.$$

Luego

$$\int_1^{1+\pi} \left|\cos x\right| dx = 2,$$

por lo que, la proposición es **VERDADERA**. ★